Erik Holst
Fysisk laboratorium
Danmarks farmaceutiske Højskole.

Indledning.

Nærværende noter skal kun tjene som en støtte til undervisningen i sandsynligheds-regning og statistik på Biologisk fortsættelseskursus. En del formler er derfor angivet uden bevis og de logiske udtryk '$\wedge$' (konjunktion) og '$\vee$' (disjunktion) indføres uden omtale af den matematiske logik.

Læsere, der ønsker en mere omfattende introduktion til mængdelæren, henvises til en eller flere af følgende bøger.

Jonas Lichtenberg: Matematik og Symboler
(Teknisk forlag, København, 1967)

Seymour Lipschutz: Set Theory and Related Topics
(Schaum Publishing Co., New York, 1964)

J. G. Kemeny, J. L. Snell and G. L. Thompson: Introduction to Finite Mathematics (second edition)
(Prentice-Hall, inc. 1966, Englewood Cliffs, N. J.)

Robert R. Stoll: Sets, Logic and Axiomatic Theories
(W. H. Freeman and Company, Golden Gate book, San Francisco, 1961).

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

1. Mængder og elementer.

Mængder er sammensat af elementer; at et objekt a er element i en mængde A skrives: $a \in A$.

Hvis dette ikke er tilfældet, skrives: $a \notin A$.

1. To mængder er da og kun da identiske, når de indeholder de samme elementer.

Det har vist sig praktisk også at arbejde med en mængde uden elementer, kaldet den tomme mængde.
Det fremgår af (1), at der kun kan være én sådan mængde; den betegnes $\emptyset$.

Notation:
En mængde kan anføres på listeform, d.v.s. ved opremsning af dens elementer, f. eks.

$\{ a, b, c, d \}$.

Rækkefølgen, hvori elementerne skrives, er her uden betydning, således er $\{ a, b, c, d \} = \{ c, d, a, b \}$.

En mængde med kun et element skrives på formen $\{ a \}$ og kaldes en singleton.
En mængde kan ligeledes skrives på følgende måde:

$\{ x | p(x) \}$, hvor $p(x)$ er et udtryk i x.
$\{ x | p(x) \}$ læses: Mængden af alle x for hvilke $p(x)$ gælder.
Denne mængde kaldes sandhedsmængden eller løsningsmængden for $p(x)$.
$p(x)$ kaldes et åbent udsagn i en variabel.

Eksempler: $\{ 1, 2, a, b, \text{rød}, c \}$; $\{ \text{Stalin}, \text{Churchill}, x, \text{gul}, 7 \}$
$\{ \text{sort}, 23, xpq, 3, \text{tolv} \}$ og $\{ \{ a \}, b, c \}$
er eksempler på mængder, der er anført på listeform.
$\{ x | 3x + 7 = 10 \} = \{ 1 \}$ og $\{ z | z^2 - 4z + 4 = 0 \} = \{ 2 \}$
er eksempler på mængder skrevet på formen $\{ x | p(x) \}$.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

2. Inklusion og delmængder.

En mængde A siges da og kun da at være en delmængde af en mængde B, når ethvert element i A tillige er element i B.

Dette skrives:

$A \subset B$ eller $B \supset A$ og læses:

A er inkluderet i B eller
A er en delmængde af B eller
B indeholder A.

Tegnene $\subset$ og $\supset$ kaldes inklusionstegn. Findes der elementer i B, som ikke tilhører A, siges A at være en ægte eller egentlig delmængde af B.
Nogle steder ses skrivemåden:

$A \subseteqq B$ for: A er en delmængde af B og
$A \subset B$ for: A er en ægte delmængde af B.

For enhver mængde A gælder: $A \subset A$ og $\emptyset \subset A$

(1,1) kan nu skrives: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ og $B \subset A$.

Endvidere gælder:

$A \subset C$ og $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.

Den ubegrænsede brug af skrivemåden $\{x | p(x)\}$ kan lede til paradokser (Jvf. Russell's paradoks side 19).
En måde at imødegå dette på er at betragte alle mængder i en undersøgelse som delmængder af en given mængde, der kaldes universet eller grundmængden for undersøgelsen.

$\{x | p(x)\}$ skal herefter læses:

Mængden af alle elementer i grundmængden, der opfylder $p(x)$.

For grundmængden bruges som regel betegnelsen E.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

Mængden af alle delmængder af en mængde A kaldes potensmængden til A og skrives $\mathcal{D}(A)$ eller $\mathcal{P}(A)$.
Indeholder mængden A n elementer, indeholder mængden $\mathcal{D}(A)$ 2^n elementer, mængderne A og Ø iberegnet.

<u>Eksempler:</u> $A = \{7, a, b, ti, xz\}$; $B = \{7, a, xz\}$; $B \subset A$.
$\mathcal{D}(B) = \{\{7\}, \{a\}, \{xz\}, \{7, a\}, \{7, xz\}, \{a, xz\}, \{7, a, xz\}, \emptyset\}$.

3. Fællesmængde og foreningsmængde.

Ved fællesmængden for to mængder A og B forstås mængden af alle elementer, der tilhører både A og B.

Fællesmængden for A og B skrives: $A \cap B$.

Hvis der ikke eksisterer elementer, der både tilhører A og B, siges A og B at være disjunkte, og man skriver: $A \cap B = \emptyset$.
Ved foreningsmængden for to mængder A og B forstås mængden af alle elementer, der tilhører mindst en af mængderne A og B.
Foreningsmængden for A og B skrives: $A \cup B$.

For vilkårlige mængder A, B og C gælder:

1. $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$ (Kommutative love).

2. $\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \end{array}\right\}$ (Associative love).

3. $\left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{array}\right\}$ (Distributive love).

4. $A \cap A = A$; $A \cup A = A$ (Idempotente love).

5. $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup E = E$
6. $A \cap E = A$; $A \cup \emptyset = A$. (Identitets love).

7. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

8. $A \subset B \Rightarrow A \cap C \subset B \cap C$
$A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$.

9. $C \subset A$ og $C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$
$A \subset C$ og $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$.

10. $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

Eksempler: $A = \{ a, 7, 10, \text{Hansen}, z \}$; $B = \{ b, 7, \text{Hansen}, y \}$;

$A \cup B = \{ a, 7, 10, \text{Hansen}, z, b, y \}$;

$A \cap B = \{ 7, \text{Hansen} \}$;

$C = \{ x | x^2 > 4 \}$; $D = \{ x | x \geqq 1 \}$

$C \cup D = \{ x | x^2 > 4 \vee x \geqq 1 \}$ (tegn!)

$C \cap D = \{ x | x^2 > 4 \wedge x \geqq 1 \} = \{ x | x > 2 \}$ (tegn!)

Tegnene '$\vee$' og '$\wedge$' læses som henholdsvis 'eller' og 'og'.

4. Komplementærmængde.

Lad A være en mængde. Ved komplementærmængden til A forstås mængden af alle elementer, der ikke tilhører A.

Komplementærmængden til A skrives: $\complement A$.

Ønsker man at gøre opmærksom på, hvilken grundmængde man anvender, skrives:

$\complement_E A$, hvor E betegner grundmængden.

$\complement_E A = \{ x | x \in E \wedge x \notin A \}$.

For vilkårlige mængder A og B gælder:

1. $\complement \emptyset = E$; $\complement E = \emptyset$.
2. $\complement \complement A = A$. (Komplement love)
3. $A \cap \complement A = \emptyset$; $A \cup \complement A = E$
4. $\complement (A \cup B) = \complement A \cap \complement B$ (De Morgan's love)
   $\complement (A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.
5. $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$.
6. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \complement B \Leftrightarrow B \subset \complement A$.
7. $A \cup B = E \Leftrightarrow \complement B \subset A \Leftrightarrow \complement A \subset B$.

Eksempler: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $A = \{2, 7, 9\}$

$\complement A = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

$E = \{x \mid x \geqq 0\}$; $A = \{x \mid x < 47\}$

$\complement A = \{x \mid x \geqq 47\}$.

5. Mængdedifferens.

Ved mængdedifferensen mellem to mængder A og B forstås $A \cap \complement B$.

Mængdedifferensen skrives: $A \setminus B$ eller $A - B$.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

For vilkårlige mængder A, B og C gælder:

1. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

2. $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

3. $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

Ved den symmetriske differens mellem to mængder A og B forstås:

$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Den symmetriske differens skrives: $A \Delta B$ eller $A + B$.

4. $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

5. $A \Delta B = B \Delta A$.

6. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

7. $A \Delta A = \emptyset$.

8. $A \Delta \emptyset = A$.

$A \Delta B$ kan også skrives: $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

E. H.
Fysisk lab.
D,f.H.

<u>Eksempler:</u>

$E = \{ 1, 2, 3, 4, xz, xy, \text{sum}, \text{differens} \}$

$A = \{ 1, 2, xz, \text{sum} \}$; $B = \{ 2, 3, xz, xy, \text{differens} \}$.

$A \setminus B = \{ 1, \text{sum} \}$; $B \setminus A = \{ 3, xy, \text{differens} \}$

$A \bigtriangleup B = \{ 1, 3, xy, \text{sum}, \text{differens} \}$

$C = \{ x | x > 5 \}$; $D = \{ x | x^2 > 36 \}$

$C \setminus D = \{ x | 5 < x \leq 6 \}$; $D \setminus C = \{ x | x < -6 \}$ (tegn!)

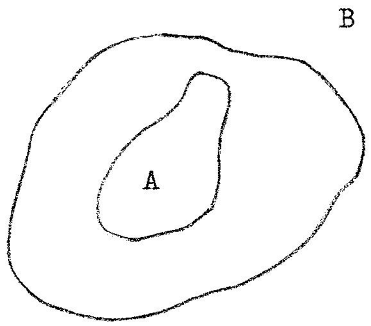
$C \bigtriangleup D = \{ x | (x < -6) \quad (5 < x \leq -6) \}$ (tegn!).

Mængdeoperationer anskueliggøres ofte ved hjælp af mængdediagrammer (Venn-diagrammer), hvorved mængderne tegnes som plane punktmængder.

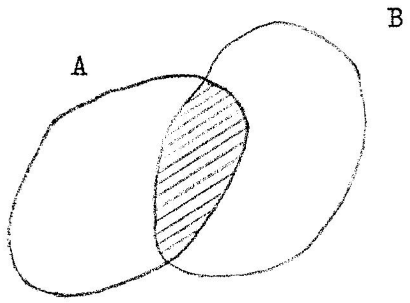
På fig. 1 er vist nogle eksempler på mængdediagrammer.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

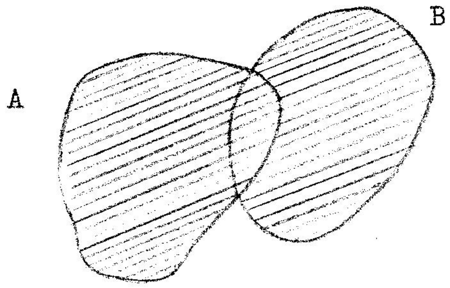
Eksempler på Venn-diagrammer.



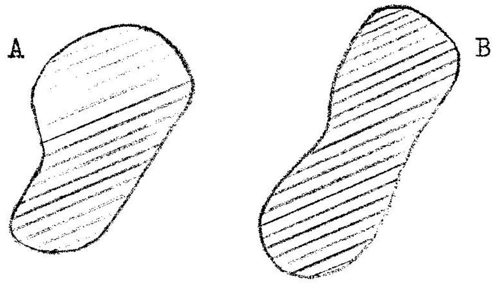
$A \subset B$



$A \cap B$ er skraveret

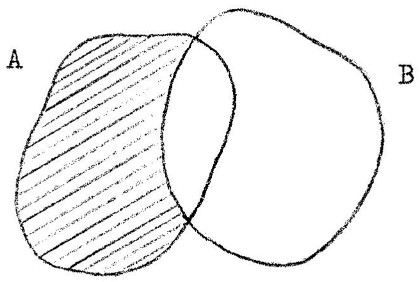


$A \cup B$ er skraveret

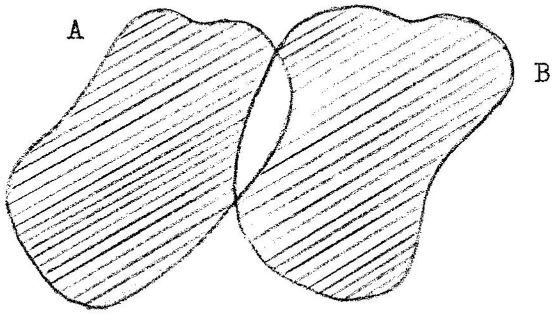


$A \cup B$ er skraveret

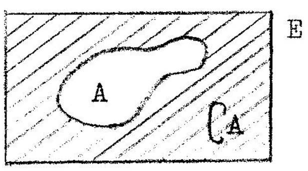
$A \cap B = \emptyset$



$A \setminus B$ er skraveret



$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ er skraveret.



$\complement A$ er skraveret

Fig. 1

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

6. Mængdeprodukt.

Til to givne objekter a og b (vi udelukker ikke muligheden $a = b$) svarer et nyt, kaldet det ordnede par med første komponent a og anden komponent b.
Det skrives: (a, b).

Der gælder følgende regel:
$(a, b) = (c, d)$ betyder, at $a = c$ og $b = d$.

(Vil man ikke antage (a, b) som grundbegreb, kan man definere (a, b) som $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ og bevise ovenstående regel).

Lad A og B være mængder.

Mængden af alle ordnede par (a, b), hvor $a \in A$ og $b \in B$ kaldes mængdeproduktet (eller det kartesiske produkt af A og B).
Det skrives: $A \times B$.

$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

For mængdeproduktet gælder følgende regler:

1. $A_1 \subset A$ og $B_1 \subset B \Rightarrow A_1 \times B_1 \subset A \times B$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
   $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
4. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

Notation:

En delmængde af et mængdeprodukt $A \times B$ kan skrives på følgende måde:
$\{ (x, y) \mid p(x, y) \}$, hvor $p(x, y)$ er et udtryk i x og y.
$p(x, y)$ kaldes et åbent udsagn i to variable.

$\{ (x, y) \mid p(x, y) \}$ læses.
Mængden af alle ordnede par (x, y) for hvilke $p(x, y)$ gælder.

Udtryk som $\{ x \mid p(x) \}$ og $\{ (x, y) \mid p(x, y) \}$ kan også skrives:
$\{ x \in A \mid p(x) \}$ og $\{ (x, y) \in A \times B \mid p(x, y) \}$, hvis det anses for nødvendigt at anføre, hvilken grundmængde, der benyttes.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

<u>Eksempler:</u> $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{1, 2, 3\}$

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)$$
$$(c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$$

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b),$$
$$(2, c), (2, d), (3, a), (3, b), (3, c), (3, d)\}.$$

Bemærk: $A \times B \neq B \times A$.

Hvis x og y er hele tal gælder:

$$\{(x, y) \mid 2x + 4y = 0\} = \{(0,0); (2,-1); (-2,1)\}.$$

På fig. 2 er begrebet mængdeprodukt anskueliggjort for A og $B \subset R$, hvor R er mængden af reelle tal. $A \times B$ bliver da inkluderet i R^2, hvor R^2 er mængden af reelle talpar.

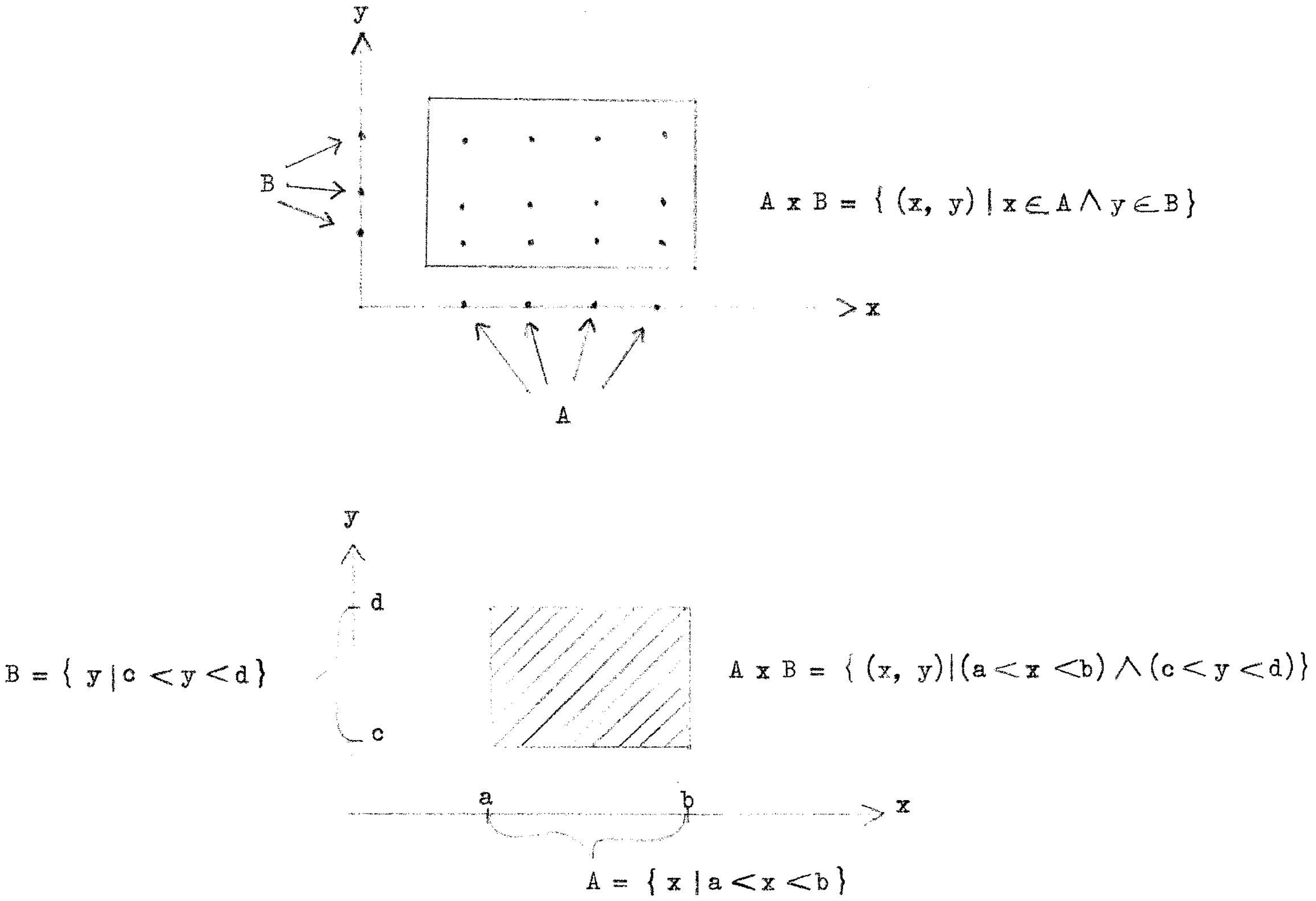


Fig. 2

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

7. Funktioner.

Lad A og B være to mængder.

Hvis der til hvert element i A på en eller anden måde er knyttet et og kun et element i B, siger vi, at der foreligger en funktion f fra A til B. Er elementet $x \in A$ knyttet til elementet $y \in B$, skriver vi: $y = f(x)$. y kaldes funktionsværdien af x, eller den værdi f antager for x.

A kaldes funktionens definitionsmængde.

B kaldes funktionens dispositionsmængde.

Ved værdimængden for f forstås mængden af alle $y \in B$, for hvilke der eksisterer et $x \in A$, således at $y = f(x)$.

At f er en funktion fra A til B skrives:

$f: A \to B$ eller $f: A \curvearrowright B$.

En funktion kan også anføres:

$f: x \to f(x)$, hvor det må fremgå af sammenhængen, hvad der er definitionsmængde og dispositionsmængde.

Mængden af alle funktioner fra A til B betegnes B^A.

Synonymt med funktion bruges ordet afbildning. Man bruger da udtrykket, f er en afbildning af A ind i B, og i stedet for 'værdi' bruges ordet 'billede', tilsvarende skrives 'billedmængde' for 'værdimængde'.

Eksempel: Lad f til hvert land i verden knytte dets hovedstad. Definitionsmængden A for f er da mængden af alle lande i verden. Værdimængden eller billedmængden for f er da den delmængde af B, der indeholder alle verdens hovedstæder.
f(USSR) = Moskva; f(Norge) = Oslo.
Billedet af USSR er Moskva, og billedet af Norge er Oslo.

Lad f være en funktion fra A til B og M en delmængde af A ($M \subset A$). Ved billedet af M ved f forstås mængden $f(M)$ af alle $y \in B$, for hvilke der eksisterer et $x \in M$, således at $f(x) = y$.
For funktionens værdimængde $f(A)$ gælder da: $f(A) \supset f(M)$.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

Har M kun et element x, skrives f(x) i stedet for f({ x }).

På fig. 3 og 4 er det generelle funktionsbegreb anskueliggjort.

En funktion f: $A \to B$ kaldes da og kun da en surjektion, når f(A) = B.
f kaldes da også en surjektiv afbildning eller en afbildning af A på B.

En funktion f: $A \to B$ kaldes da og kun da en injektion, når det gælder for alle $x_1, x_2 \in A$:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, eller anderledes udtrykt:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

f kaldes da også en injektiv afbildning eller en en-entydig afbildning.

En funktion f: $A \to B$ kaldes da og kun da en bijektion, når den er både en surjektion og en injektion.
Funktionen f fastlægger da en en-entydig forbindelse mellem A og B.
En bijektion kaldes også en bijektiv afbildning.

Eksempel: Hvis vi i det første eksempel som dispositionsmængde havde valgt mængden af verdens hovedstæder, ville f have været en bijektion. (Hvorfor?).
Idet M = { Danmark, Sverige, Finland, Norge }, haves
f(M) = { København, Oslo, Stockholm, Helsinki } .

En reel funktion er en funktion, hvis dispositionsmængde er mængden af reelle tal eller en delmængde deraf.

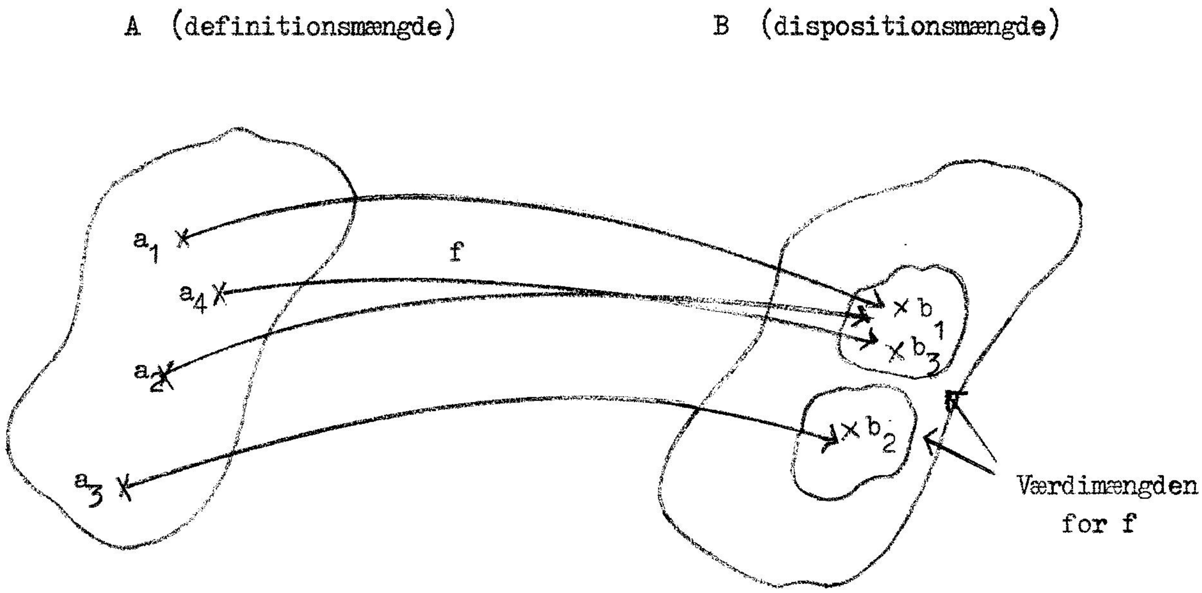
Det bemærkes, at der ikke er stillet noget krav til definitionsmængden for en reel funktion.

Eksempel: Betragter vi en gas under et stempel, vil gastrykket kun være bestemt af rumfanget under stemplet og gassens temperatur.
Gastrykket er derfor en reel funktion defineret på mængden af ordnede par (v, T), hvor v er gassens specifikke rumfang, og T er gassens absolutte temperatur.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

Er luftarten ideal, har vi: $p = f(v, T) = \frac{RT}{v}$.

Eksempel: Betragter vi et givet legeme, vil der til hvert punkt i legemet svare en og kun en temperatur. Temperaturen i legemet er altså en reel funktion defineret på en mængde, hvis elementer er på formen (x, y, z) hvor (x, y, z) er koordinaterne til et givet punkt i legemet, d.v.s., $T = f(x, y, z)$.

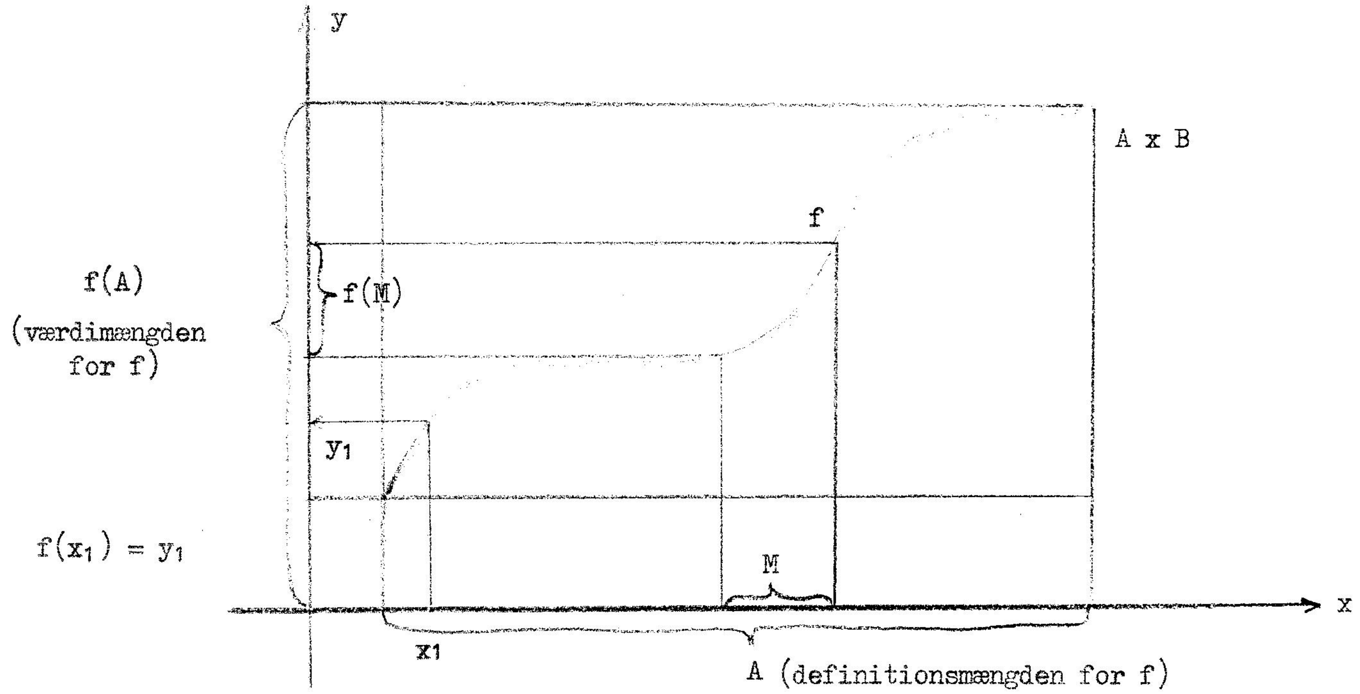


$f(a_1) = f(a_2) = b_1$ og $f(a_3) = b_2$.

Idet $M = \{a_1, a_2, a_3\} \subset A$ fås $f(M) = \{b_1, b_2\} \subset B$.

Fig. 3

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.



Dispositionsmængden for f er mængden af reelle tal (hele y-aksen)

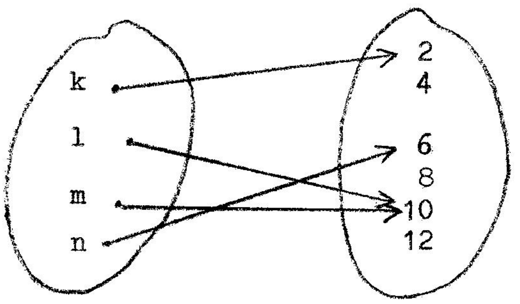
Fig. 4

Lad f være en funktion fra A til B, og lad $b \in B$. Ved det inverse billede til b forstås mængden af alle de elementer i A, der har b som billede. Vi skriver:

$$f^{-1}(b) = \{ x \mid x \in A \wedge f(x) = b \} .$$

Bemærk: $f^{-1}(f(a)) = a$, når f er injektiv.

<u>Eksempel:</u> Lad funktionen f være defineret ved diagrammet:



$f^{-1}(2) = k$; $f^{-1}(6) = n$; $f^{-1}(10) = \{ 1, m \}$;
$f^{-1}(4) = f^{-1}(8) = f^{-1}(12) = \emptyset$.

Lad D være en delmængde af B, d.v.s. $D \subseteq B$. Ved det inverse billede til D forstås mængden af alle de elementer i A, der afbildes i et element, som tilhører D. Vi skriver:

$$f^{-1}(D) = \{ x \mid x \in A \wedge f(x) \in D \} .$$

Bemærk: $f(f^{-1}(N)) = N$, når f er surjektiv og $f^{-1}(f(M)) = M$, når f er injektiv.

Eksempel: Idet der henvises til det foregående eksempel, vælger vi

$D = \{ 2, 4, 6 \}$ og får:

$$f^{-1}(D) = f^{-1}(\{ 2, 4, 6 \}) = \{ k, n \} .$$

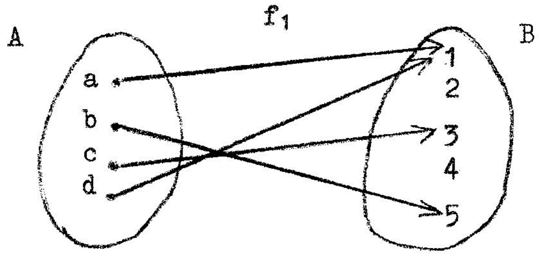
Lad f være en funktion fra A til B.

Hvis f er en injektion, vil der til hvert element i $f(A) \subset B$ svare et og kun et element i A, d.v.s. der eksisterer en funktion fra f(A) til A. Denne funktion betegnes f^{-1} og kaldes den inverse funktion til f.

Vi har altså: $f: A \to B$ og $f^{-1}: f(A) \to A$.

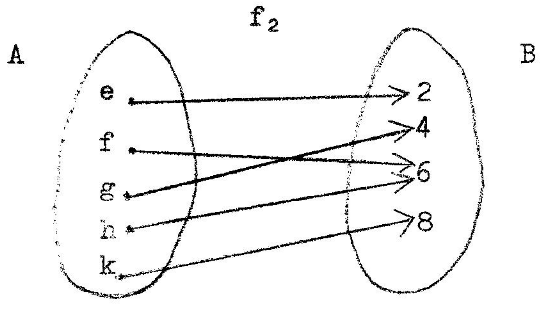
Det skal endnu engang indskærpes, at den inverse (eller omvendte) funktion til f kun eksisterer, når f er en injektion. Billedmængden f(A) for f skal jo være definitionsmængde for f^{-1}, d.v.s. ethvert element i f(A) skal have et og kun et billede i A; f skal derfor være injektiv.

Eksempel: Lad funktionerne f_1, f_2, f_3 og f_4 være givet ved følgende diagrammer:

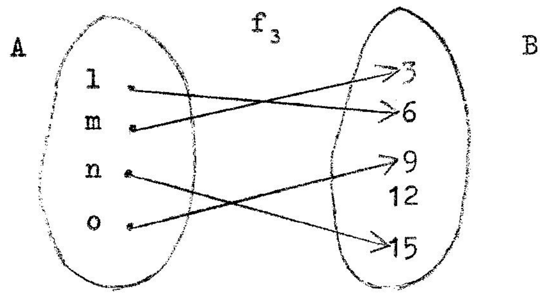


f_1 er hverken surjektiv eller injektiv. Der eksisterer ingen invers funktion til f_1.

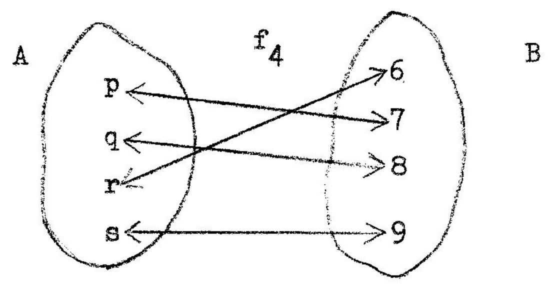
E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.



f_2 er surjektiv, men ikke injektiv. Der eksisterer ingen invers funktion til f_2 .



f_3 er injektiv, d.v.s. der eksisterer en invers funktion til f_3 med definitionsmængden $f(A) = \{ 3, 6, 9, 15 \}$.
$f_3^{-1}: \; f(A) \rightarrow A$.



f_4 er bijektiv, og dermed injektiv, d.v.s. der eksisterer en invers funktion til f_4 med definitionsmængden $f(A) = B$.
$f_4^{-1}: \; B \rightarrow A$.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

8. Sammensatte funktioner.

Lad der være givet tre mængder A, B og C og to funktioner
f: $A \to B$ og g: $B \to C$.

Lad $a \in A$. Vi har da: $f(a) \in B$ og $g(f(a)) \in C$. Til hvert element i A svarer et og kun et element i C, d.v.s. vi har en funktion fra A til C.

Denne funktion kaldes den sammensatte funktion og betegnes **g∘f**
For f: $A \to B$ og g: $B \to C$, definerer vi altså den sammensatte funktion $g \circ f$: $A \to C$ ved $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. (Se fig. 5)

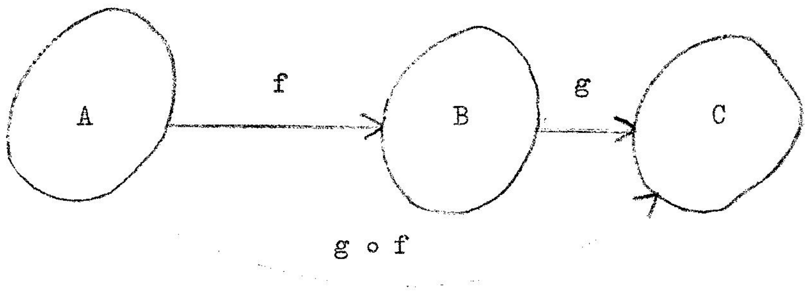
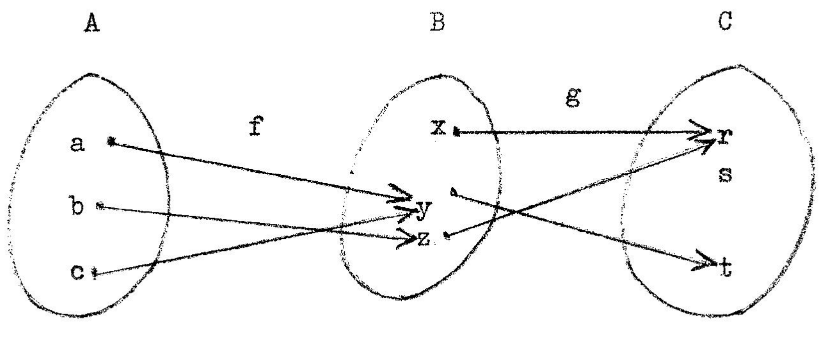


Fig. 5

Bemærk: **g∘f** og f∘g er i almindelighed ikke samme funktion.

Eksempel: Lad f: $A \to B$ og g: $B \to C$ være defineret ved følgende diagrammer.



E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y) = t.$

$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = r.$

$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = t.$

For samme funktioner gælder:

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$(h \circ g) \circ f = h\ (g \circ f)$

$(g \circ f)(A) = g(f(A))$.

f og g surjektive = $g \circ f$ surjektiv.

f og g injektive = $g \circ f$ injektiv.

f og g bijektive = $g \circ f$ bijektiv.

E.H.
Fysisk lab.
D.f.H.

9. Russel's paradoks.

<u>Definition:</u> En almindelig mængde M, er en mængde, der ikke er element i sig selv, d.v.s. $M \notin M$.

<u>Eksempel:</u> Mængden A af alle abstrakte begreber er ikke en almindelig mængde, d.v.s. $A \in A$.

- - - - - - -

Vi betragter mængden U af alle almindelige mængder.
Der er to muligheder.

1) U er en almindelig mængde.
2) U er ikke en almindelig mængde.

Antages, at U er en almindelig mængde, må den, da U er mængden af alle almindelige mængder, være element i sig selv, altså $U \in U$, men ifølge definitionen på almindelig mængde kan U så ikke være en almindelig mængde.

Antages, at U er en ikke almindelig mængde, haves ifølge definitionen på almindelig mængde, at den er element i sig selv, altså $U \in U$, men da U er mængden af alle almindelige mængder, kan U ifølge antagelsen ikke være element i sig selv.